



Серия №29. Показатели

18 июля

Определение. Число t называют показателем или порядком остатка a по модулю n , если t – наименьшее натуральное число такое, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

1. Пусть t – показатель остатка a по модулю n . Докажите, что
 - а) если $m : t$, то $a^m \equiv 1 \pmod{n}$;
 - б) если $a^m \equiv 1 \pmod{n}$, то $m : t$;
 - в) $\varphi(n) : t$;
 - г) Остатки чисел $1, a, a^2, \dots, a^{t-1}$ по модулю n попарно различны.

Задачи

2. Показатели остатков a и b по модулю 101 равны 100. Известно, что $a^k \equiv b \pmod{101}$. Докажите, что k нечетно.
3. Пусть $n = 4q$, где q – нечётное простое, $(a, n) = 1$. Может ли показатель остатка a по модулю n быть равен $\varphi(n)$?
4. Пусть $p > 2$, $q > 5$, p и q – простые. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q . Докажите, что $q \equiv 1 \pmod{2p}$.
5. Найдите все натуральные n , для которых число $2^n - 1$ и n имеют одинаковый набор простых делителей.
6. Найдите все простые числа p, q такие, что $5^p + 5^q$ делится на pq .
7. Докажите, что для любого натурального n любой простой делитель числа $n^4 - n^2 + 1$ сравним с 1 по модулю 12.
8. Докажите, что показатель 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.
9. Найдите все натуральные n такие, что число $3^n - 2^n - 1$ является квадратом целого числа.